5. Übungsblatt (zu bearbeiten bis 21.05.2007)

18. Ein Metallkontakt ist mit einer dünnen, isolierenden Oxidschicht bedeckt (Dicke 1.0 nm). Bei kleinen Spannungen können Elektronen nur aufgrund des Tunneleffekts durch diese Schicht fließen, die näherungsweise als ein Potentialwall von 4 eV Höhe beschrieben werden kann. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Elektronen mit einer Energie von 3 eV durch die Oxidschicht tunneln können!

19. Als harmonischer Oszillator wird ein System bezeichnet, in welchem sich ein Teilchen der Masse m unter dem Einfluss des Potentials $U(x) = ½\, kx^2$ bewegt (k = Kraftkonstante).
(a) Formulieren Sie die Schrödinger-Gleichung und den Hamiltonoperator für dieses Problem!
(b) Berechnen Sie den Energieeigenwert E_1, der zu der folgenden Wellenfunktion gehört:

$$\Psi_1 = N_1 \cdot x \cdot e^{-\beta x^2} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}$$

20. Wie groß ist die Nullpunktsenergie (a) für ein $H^{35}Cl$-Molekül und (b) für ein Mol von $H^{35}Cl$, wenn die Kraftkonstante im Modell des harmonische Oszillators k = 480.6 Nm^{-1} beträgt? Vergleichen Sie diesen Wert mit den Energien, die bei chemischen Reaktionen auftreten.

21. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons sei auf den Umfang eines Kreises mit dem Radius R beschränkt. Innerhalb und außerhalb des Kreises ist die potentielle Energie U unendlich hoch:

$$r < R:\ U \to \infty \qquad r = R:\ U = 0 \qquad r > R:\ U \to \infty$$

Die Schrödinger-Gleichung (in Polarkoordinaten der Ebene formuliert) lautet:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2}(E - U)\Psi = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\Psi = a\,cos(\lambda\varphi)$ mit $\lambda = \frac{R}{\hbar}\sqrt{2m_e E}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist!

(b) Bestimmen Sie aus der Anschlussbedingung $\Psi(\varphi = 0) = \Psi(\varphi = 2\pi)$ die erlaubten Werte für λ sowie den Koeffizienten a aus der Normierungsbedingung!

Hinweis: $\int cos^n cx\, dx = \frac{1}{nc} sin\, cx \cdot cos^{n-1} cx + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2} cx\, dx$

(c) Stellen Sie schließlich die Wellenfunktion des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands auf und skizzieren Sie den Verlauf der beiden Funktionen!